EFFET DE LA POROSITÉ SUR LES CONTRAINTES D'INTERFACE DES POUTRES FGM RENFORCÉES PAR DES PLAQUES COMPOSITES

EFFECT OF POROSITY ON INTERFACIAL STRESSES IN FG BEAMS STRENGTHENED WITH COMPOSITE LAMINATES

FOUAD BOURADA[1,3], KHALED AMARA[1,3*], MOHAMED BOURADA[2], SAMIR BENYOUCEF[3]

[1]Centre Universitaire Belhadj Bouchaib Ain Témouchent, Algérie
[2]Laboratoire de modélisation et simulation multi-échelles, Université de Sidi Bel Abbes, Algérie
[3]Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, Algérie

Date de réception : 31/08/2016 / Date d'acceptation : 25/11/2016 / Date de publication : 30/01/2017

RÉSUMÉ

Ce travail présente une contribution à la détermination des contraintes d'interface dans les poutres en matériaux fonctionnellement graduées renforcées par des plaques en matériaux composites (FRP). Une approche analytique basée sur le principe de la compatibilité de déformation sera présentée.

La poutre est en matériau FGM avec des propriétés mécaniques variant suivant l'épaisseur selon une loi de mélange bien déterminée. Les défauts dans ces poutres qui peuvent surgir lors du processus de fabrication sous forme de porosité sont pris en compte lors de la détermination de ces contraintes d'interface. Une étude paramétrique détaillée sera présentée afin de souligner les facteurs influant sur les contraintes au niveau de l'interface poutre-plaque de renforcement.

Mots clés : Contraintes d'interface – Poutre FG – Renforcement.

ABSTRACT

This works presents a method for determining the interfacial stresses between strengthening composite plate FRP and a fonctionally graded beam (FGB). An analytical approach based on the principle of compatibility of deformation will be presented.

The FG beam material with mechanical properties that vary through to the thickness according to a well defined mixture of law. Defects in these beams may arise during the manufacturing process in the form of porosity are taken into account in the determination of these interface stresses. A detailed parametric study will be presented to highlight the factors influencing the interfacial stresses.

Keywords: Interfacial stresses– FG Beam – Strengthening.

1. INTRODUCTION

Les matériaux composites avancés ou couramment appelés les F.G.M (Functionally Graded Materials) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. La réussite qu'a connue ces matériaux dans leurs utilisation dans ces milieux **à** pousser les industriels et les chercheurs à étendre leur champs d'application à d'autres espaces notamment en génie civil. Par conséquent, ces derniers, utilisés sous diverses formes, sont assujettis à diverses sollicitations. Différents types d'endommagement s'initient et se propagent dans les composants des FGM pendant leurs fabrication et durant leur durée de service [1-5]. La présence de ces endommagements engendre des dégradations dans les composants des propriétés mécaniques. Pour assurer l'intégrité structurelle, les éléments structuraux doivent être remplacés ou réparés. Cependant, dans de nombreux cas le remplacement de ces éléments est impossible voir coûteux. Par conséquent, la réparation et le renforcement par l'emploi de matériaux composites s'imposent comme une solution importante afin de rétablir la résistance, la rigidité et la durabilité des composants endommagés. La réparation des ouvrages endommagé ou nécessitant un confortement peut être réalisée sous diverses formes tel que le boulonnage, le collage de plaques en acier ou en composite [6-8] ou bien par injection d'une résine dans la zone d'endommagement [9]. Lors de ces dernières années, le renforcement par tôles d'acier a été remplacé par le renforcement par matériaux composites. La plupart des renforts composites utilisés dans le génie civil sont des composites carbone – époxyde ou verre – époxyde. Leurs performances mécaniques spécifiques sont en effet supérieures à celles de l'acier, tel que la résistance à la traction et à la compression, Garden et al. [10]. Les avantages de l'utilisation de composites sont nombreux. On peut citer par exemple leur grande résistance à la fatigue, leur légèreté ainsi que leur durabilité, Saadatmanesh et al. [11] et Meier et al. [12]. Dès lors, les études sur l'utilisation de matériaux composites pour la réhabilitation se sont multipliées. Ferrier [13] et Avril [14] ont présenté les problèmes posés par cette nouvelle technique. Le renforcement par collage extérieur de matériaux composites sur les poutres à l'aide de plaques FRP stratifiées représente une nouvelle technique dans le domaine du génie civil. Le délaminage de la plaque de FRP est l'un des modes principaux de rupture de ces structures renforcées à cause des fortes contraintes d'interface à l'extrémité de cette plaque. De nombreuses études ont été menées, afin de prédire le calcul de ces contraintes d'interface, on peut citer à titre exemple, celles Tounsi et al [15], Tounsi [16], Benyoucef et al. [17], Malik et al. [18], Roberts [19], Roberts et Haji-Kazemi [20], Ye [21], Smith et Teng [22], Chai et al. [23]. A travers la littérature on note que les méthodes actuelles sont élaborées en tenant compte particulièrement des hypothèses suivantes **:** les matériaux sont élastiques et linéaires et les contraintes normales et de cisaillement demeurent constantes à travers l'épaisseur de l'adhésif, Benachour.[24]. Deux approches sont utilisées pour évaluer les contraintes d'interface : l'approche basée sur des considérations directes de compatibilité de déformation, utilisée par Taljsten [25], Smith et Teng [22], Tounsi et al. [15], Tounsi [16], Benyoucef et al. [26], considèrent directement la compatibilité des déformations pour déterminer les contraintes d'interface. La solution de Malik et al. [18], est exprimée en fonction du moment engendré par le chargement appliqué. Les contraintes des cisaillements, d'interface dans une couche adhésive, sont reliées à la différence entre le déplacement longitudinal à la base de la poutre et celui à la partie supérieure de la plaque de renforcement. La différence entre ces solutions pour le cas des contraintes de cisaillement est dans le choix des termes inclus dans la détermination de l'expression des déplacements longitudinaux, Benachour [24]. Les déformations de flexion de la poutre et les déformations axiales de la plaque sont prises en compte dans toutes ces solutions. La solution présentée par Liu et Zhu [27] est la seule qui considère les effets des déformations de cisaillement de la poutre, mais la contribution de ces derniers est ignorée dans la détermination de l'expression des contraintes normales. Les contraintes normales d'interface sont reliées aux déformations verticales de la poutre et la plaque de renforcement. Vilnay [28] et Taljsten [25] décrivent l'équation qui régit les contraintes normales en termes de déplacements verticaux de la plaque de renforcement ; quant à Liu et Zhu [27] et Malek [18], ils les présentent en termes de contraintes normales d'interface. Néanmoins, les équations obtenues par Vilnay [28] et Taljsten [25] peuvent être déduites de celles de Liu et Zhu [27] et Malik [18]. Cependant, la solution de Liu et Zhu [27] est incomplète dans ses constantes d'intégration, seulement les conditions aux limites sont fournies. L'approche d'analyse par étapes est le chemin emprunté par Roberts [19] et Roberts et Haji-Kazemi [20]. La solution de Roberts et Haji-Kazemi [20] est appliquée uniquement pour un chargement réparti. Dans la première étape de cette solution, les considérations de la compatibilité des déformations conduisent à la détermination des contraintes de cisaillement. Les efforts qui se développent aux extrémités (poutre et plaque) dus au fluage sont pris en compte. Si le phénomène de fluage n'existe pas, ces efforts sont égaux à zéro. Dans cette première étape, la poutre et la plaque sont supposées avoir les mêmes courbes et cela conduit à la non considération des contraintes normales dans les expressions d'équilibre de la poutre dans cette étape. Comme résultat de cette étape, nous aurons un moment de flexion et un effort de cisaillement non nuls aux extrémités de la plaque. Dans la deuxième étape d'analyse, un moment de flexion et un effort normal égaux à ceux de la première étape sont appliqués aux extrémités de la plaque qui est considérée comme une poutre sur assises élastiques représentés par la couche d'adhésif. Cette deuxième étape d'analyse conduit à la détermination des contraintes normales et de cisaillement additionnelles dues à la courbure de la plaque relative à celle de la poutre. Enfin, les contraintes totales (normales et cisaillement) sont obtenues par superposition des résultats des deux étapes. Cependant, la contrainte normale de la première étape et la contrainte de cisaillement de la deuxième étape sont en général petites.

Meradjah et al. [29] ont présenté une solution analytique basée sur l'approche de compatibilité de déformation pour l'étude des contraintes d'interface au niveau d'une poutre FGM simplement appuyée et renforcée par une plaque en matériaux composites. Les propriétés matérielles de la poutre ont été supposées variées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi exponentielle.

Durant le processus de fabrication des FGM, des défauts peuvent surgir sous forme de porosité. Cette dernière, si elle n'est pas prise

en compte dans les calculs, peut nuire au comportement global de la structure. Dans cet article, et en se basant sur les travaux déjà réalisés par Meradjah et al. [29], nous présentons une méthode pour la modélisation des contraintes au niveau de l'interface pour FGM-plaque composite. Les porosités dans la poutre FGM sont prises en compte dans l'évaluation des propriétés mécaniques de la poutre qui varient suivant une simple loi de puissance dans la direction de l'épaisseur. Finalement, une étude paramétrique détaillée sera présentée afin de souligner les effets des différents facteurs pouvant influer la distribution des contraintes d'interface.

2. MODÈLE ANALYTIQUE POUR LE CALCUL DES CONTRAINTES D'INTERFACE DES POUTRES FGM

2.1- Les hypothèses de base

Considérons une poutre FGM simplement appuyée renforcée en flexion par une plaque FRP d'une longueur L_p et d'une hauteur t_p. L'ensemble est soumis à une charge d'intensité q égale.
Une illustration schématique de la poutre FGM renforcée par une plaque en composite (FRP) est montrée sur la Fig. 1-a.

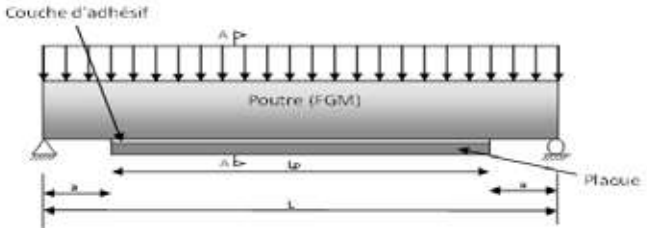


Figure 1-a: Poutre FGM renforcée par une plaque FRP
Figure 1-a: FGM beam strengthened by FRP plate

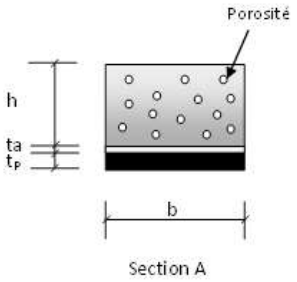


Figure 1-b: section A de la poutre FGM renforcée par une plaque FRP.
Figure 1-b: section A of the FGM beam strengthened by FRP plate.

Pour cette étude les hypothèses retenues sont les suivantes :
- tous les matériaux, y compris la poutre FGM, la plaque et la couche d'adhésive ont un comportement linéaire élastiques ;
- la poutre FGM est orthotrope en tout point ;
- pas de glissement autorisé à l'interface (il existe une parfaite liaison à l'interface de collage entre la poutre et la plaque) ;
- la contrainte de cisaillement et la contrainte normale dans la couche d'adhésif ne varient pas à travers l'épaisseur de cette dernière ;
- la déformation de cisaillement de la plaque et la poutre FGM est négligée ;
- la déformation de flexion de l'adhésif est négligée ;
- l'analyse des contraintes de cisaillement suppose que les courbures de la poutre et la plaque sont égales (permet le découplage des équations de la contrainte de cisaillement et la contrainte normale).

Toutefois, cette dernière hypothèse n'est pas faite dans la solution de la contrainte normale. Cette hypothèse est également faite en général par d'autres chercheurs, Tounsi et Benyoucef [15] et, Tounsi et al. [30].
Dans ce qui suit, un modèle analytique basé sur la compatibilité des déformations sera proposé pour le calcul des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par des plaques FRP [4-8].

2.1 La théorie des poutres d'Euler Bernoulli pour les poutres FGM

Dans ce paragraphe, l'hypothèse de section plane qui reste plane après déformation développée par Euler Bernoulli sera retenue. Pour cela, nous supposons qui il n'y a pas un changement d'épaisseur c.à.d. le déplacement w est indépendant de z.
L'expression de déplacement peut être écrite de la manière suivante :

$$u(x,y) = u_0(x) - z\frac{dw}{dx} \quad et \quad w(x,z) = w_0(x) \tag{1}$$

Où u_0 et w_0 sont les composantes de déplacement du plan moyen suivant la direction x et z respectivement.
A partir de l'hypothèse de petite perturbation, le tenseur de déformation linéaire de Green-Lagrange s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_x = u_x^0(x) - z \quad w_{xx}^0(x) = \varepsilon_0 + zk \tag{2}$$

La composante de déformation Eq. (2) est reliée à sa contrainte correspondante par la relation constitutive suivante :

$$\sigma(x) = E(z)\,\varepsilon_x \tag{3}$$

Le module d'élasticité est supposé varier de façon continue à travers l'épaisseur de la poutre, Wattanasakulpong et al. [31] est donné par :

$$E(z) = (E_U - E_L)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_L - (E_U + E_L)\frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

Où n est l'indice matériel, E_U est le module de Young de la partie supérieure, E_L est le module de Young de la partie inférieure, α est un coefficient qui tient compte de la porosité ; pour α = 0, la poutre est considérée comme parfaite.
La force axiale et le moment de flexion résultante, N et M, sont définis comme dans la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli:

$$(N,M) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(1,z)dz \tag{5}$$

L'équation constitutive des composites exprimée en fonction des efforts de membranes N et les moments M est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} \tag{6}$$

En rappelant que les matrices A, B et D devient des expressions suivantes :

$$(A,B,D) = \int_{-h/2}^{h/2} \left((E_U - E_L)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_L - (E_U + E_L)\frac{\alpha}{2} \right)(1, z, z^2)dz \tag{7}$$

De ce fait, les expressions de A, B et D seront données par :

$$A = h\left[E_L + \frac{(E_U - E_L)}{n+1} - (E_L + E_U)\frac{\alpha}{2}\right] \quad (8)$$

$$B = h^2(E_U - E_L)\left(\frac{n}{(n+2)(2n+2)}\right) \quad (9)$$

$$D = \frac{E_L h^3}{12} + (E_U - E_L)\frac{h^3}{4}\left[\frac{n^2+n+2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] - (E_U + E_L)\frac{\alpha\ h^3}{24} \quad (10)$$

Les relations inverses correspondant à celle de l'Eq. (6) sont les suivantes:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_0\\ k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ B & D\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A^* & B^*\\ B^* & D^*\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix} \quad (11)$$

L'expression de la déformation pour l'effort normale nul (N □ 0) prend la forme :

$$\varepsilon_0 = B^* M, \quad k = D^* M \quad (12)$$

En substituant les Eqs. (2) et (12) dans l'Eq. (3), la contrainte normale dans la poutre FGM prend la forme suivante :

$$\sigma_x = E(z)M\left[B^* + zD^*\right] \quad (13)$$

Au niveau de l'axe neutre, les contraintes sont nulles ($\sigma_x = 0$), d'où :

$$z_{NA} = -\frac{B^*}{D^*} \quad (14)$$

L'équation ci-dessus est similaire à celle obtenue par Sankar et al. [32].

2.2. Les contraintes de cisaillement d'interface

La contrainte de cisaillement au niveau de la couche d'adhésif peut être exprimée par :

$$\tau_a(x) = \frac{G_a}{t_a}\left[u_p(x) - u_b(x)\right] \quad (15)$$

Où G_a, t_a, u_b et up représente le module de cisaillement, l'épaisseur de l'adhésif, le déplacement longitudinal à la base de la poutre FGM, et le déplacement longitudinal au sommet de la plaque FRP, respectivement. L'Eq. (15) peut être exprimée en termes de contraintes mécaniques de la poutre FGM, après dérivation de l'équation précédente par rapport à x on trouve :

$$\frac{d\tau_a(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a}\left[\varepsilon_p(x) - \varepsilon_b(x)\right] \quad (16)$$

Où

$$\frac{du_b(x)}{dx} = \varepsilon_b(x) \quad et \quad \frac{du_p(x)}{dx} = \varepsilon_p(x) \quad (17)$$

La déformation de la poutre FGM est donnée sous la forme suivante :

$$\varepsilon_b(x) = -\frac{1}{b}\left[A^* + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)B^*\right]N_b(x) + \frac{1}{b}\left[B^* + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)D^*\right]M_b(x) \quad (18)$$

La déformation au niveau de la partie supérieure de la plaque de renforcement est :

$$\varepsilon_b(x) = -\frac{1}{b}\left[A^* + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)B^*\right]N_b(x) \quad (19)$$

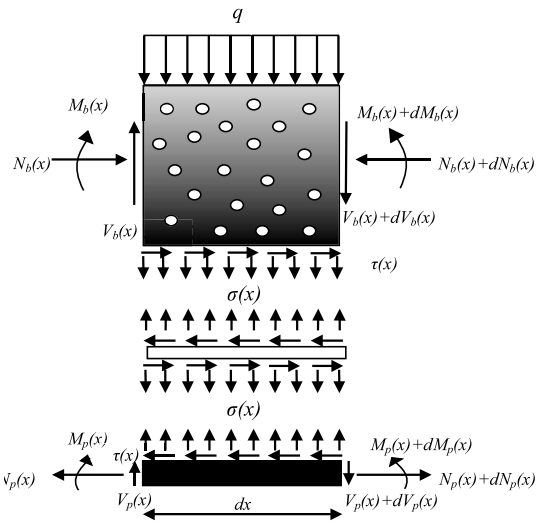


Figure 2 : Un segment différentiel de la poutre (FGM) renforcée par une plaque en composite.
Figure 2: A differential segment of the FG beam reinforced by a FRP plate.

Où E_p, A_p, I_p, t_p et b désigne respectivement le module d'élasticité, la section transversale, le moment d'inertie de la plaque, l'épaisseur de la plaque, et la largeur de la poutre FGM. Considérant l'équilibre horizontal des forces de l'élément de la poutre renforcée nous obtenons :

$$\frac{dN_b(x)}{dx} = \frac{dN_p(x)}{dx} = b\tau(x) \quad (20)$$

Où

$$N(x) = N_b(x) = N_p(x) = b\int_0^x \tau(x)dx \quad (21)$$

En supposant que la poutre et la plaque ont la même courbure, la relation entre les moments dans les deux surfaces peut être exprimée comme :

$$M_b(x) = \frac{b}{D^* E_p I_p}M_p(x) - \frac{B^*}{D^*}N_b(x) \quad (22)$$

Le moment d'équilibre de l'élément de la poutre renforcée Fig. 2 est donné par :

$$M_T(x) = M_b(x) + M_p(x) + N(x)\left[\frac{t_p}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)\right] \quad (23)$$

Le moment de flexion dans chaque plaque adhérente, exprimée en fonction du moment total appliqué et la contrainte de cisaillement d'interface, est donné comme suit :

$$M_T(x) = M_b(x) + M_p(x) + N(x)\left[\frac{t_p}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)\right] \quad (24)$$

$$M_p(x) = \frac{D^* E_p I_p}{b + D^* E_p I_p}\left[M_T(x) - N(x)\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right)\right.\right. \quad (25)$$

Le premier dérivé du moment de flexion dans chaque adhérente donne :

$$M_p(x) = \frac{D^* E_p I_p}{b + D^* E_p I_p}\left[M_T(x) - N(x)\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right) + z_{NA}\right)\right] \quad (26)$$

$$\frac{dM_p(x)}{dx} = V_p(x) = \frac{D^* E_p I_p}{b + D^* E_p I_p}\left[V_T(x) - b\tau(x)\left(\frac{tp}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} + z_{NA}\right) + z_{NA}\right)\right] \quad (27)$$

En substituant les Eqs. (18) et (19) dans l'Eq. (16) et en dérivant l'équation obtenue, nous aurons :

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} = \frac{G_a}{t_a}\left[\frac{1}{E_p A_p}\frac{dN_p(x)}{dx} - \frac{t_p}{2E_p I_p}\frac{dM_p(x)}{dx} + \frac{1}{b}\left(A^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]B^*\right)\frac{dN_b(x)}{dx} - \frac{1}{b}\left(B^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]D^*\right)\frac{dM_b(x)}{dx}\right] \quad (28)$$

En substitution les expressions des efforts tranchant des deux adhérents, Eqs. (26) et (27) ainsi que ceux des efforts normaux l'Eq. (21) dans l'Eq. (28) nous aurons l'équation différentielle des contraintes de cisaillement :

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} + \frac{G_a/t_a}{D^* E_p I_p + b}\left[\frac{t_p}{2}D^* + \left(B^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]D^*\right)\right]V_T(x) - \\ &\frac{G_a}{t_a}\left[\frac{b}{E_p A_p} + \frac{t_p D^* b}{2(D^* E_p I_p + b)}\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] - \frac{B^*}{D^*}\right) + A^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]B^* - \right. \\ &\left.\frac{b}{D^* E_p I_p + b}\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] + \frac{E_p I_p}{b}B^*\right)\left(B^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]D^*\right)\right]\tau(x) = 0\end{aligned} \quad (29)$$

La solution générale de l'Eq. (29) est donnée par :

$$\tau(x) = B_1\cosh(\lambda x) + B_2\sinh(\lambda x) + m_1 V_T(x) \quad (30)$$

Où

$$\begin{aligned}\lambda^2 = \frac{G_a}{t_a}&\left[\frac{b}{E_p A_p} + \frac{t_p D^* b}{2(D^* E_p I_p + b)}\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] - \frac{B^*}{D^*}\right) + A^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]B^* + \right. \\ &\left.\frac{b}{D^* E_p I_p + b}\left(\frac{t_p}{2} + t_a + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] + \frac{E_p I_p}{b}B^*\right)\left(B^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]D^*\right)\right]\end{aligned} \quad (31)$$

$$m_1 = \frac{G_a}{t_a}\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{D^* E_p I_p + b}\left[\frac{t_p}{2}D^* + \left(B^* + \left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]D^*\right)\right] \quad (32)$$

Pour le cas d'une charge uniformément répartie q, la force de cisaillement est donnée par :

$$V_T(x) = q\left(\frac{L}{2} - x - a\right) \quad (33)$$

Les constantes d'intégration B_1 et B_2, doivent être déterminées par l'application des conditions aux limites appropriées. La première condition aux limites c'est le moment de flexion à $x = 0$, le moment au bord de la plaque $M_p(0)$ et la force axiale dans la poutre et la plaque de renforcement ($N_p(0) = N_b(0)$) sont nuls.

En conséquence, le moment dans la section de la poutre seule peut être exprimé comme :

$$M_b(0) = M_T(0) = \frac{qa}{2}(L - a) \quad (34)$$

Substituant les Eqs. (18) et (19) dans l'Eq. (16), et avec l'application des conditions aux limites, on obtient:

$$\left.\frac{d\tau(x)}{dx}\right|_{x=0} = -m_2 M_T(0) \quad (35)$$

Où

$$m_2 = \frac{1}{b}\left[B^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B^*}{D^*}\right)D^*\right]\frac{G_a}{t_a} \quad (36)$$

En substituant l'Eq. (31) dans l'Eq. (35), B_2 peut être déterminée comme suit :

$$B_2 = -\frac{m_2}{\lambda}\frac{qa}{2}(L - a) + \frac{m_1}{\lambda}q \quad (37)$$

La deuxième condition aux limites est basée sur le fait que les contraintes de cisaillement sont nulles, vu la symétrie de la charge appliquée. B_1 .Peut être déterminée comme suit:

$$B_1 = \frac{m_2}{\lambda}\frac{qa}{2}(L - a)\ th\left(\frac{\lambda L_p}{2}\right) - \frac{m_1}{\lambda}q\ th\left(\frac{\lambda L_p}{2}\right) \quad (38)$$

Dans le cas où $\frac{\lambda L_p}{2} \succ 10,\ th\left(\frac{\lambda L_p}{2}\right) \approx 1$, l'expression de B_1 peut être simplifiée comme:

$$B_1 = \frac{m_2}{\lambda}\frac{qa}{2}(L - a) - \frac{m_1}{\lambda}q = -B_2 \quad (39)$$

En substitution B_1 et B_2 dans l'Eq (31), on obtient une expression de la contrainte de cisaillement d'interface dans n'importe point :

$$\tau(x) = \left[\frac{m_2 a}{2}(L - a) - m_1\right]\frac{qe^{-\lambda x}}{\lambda} + m_1 q\left(\frac{L}{2} - a - x\right) \quad (40)$$

2.3. Les contraintes normales d'interface

L'équation différentielle régissant la contrainte d'interface normale est dérivée de cette section. Lorsque la poutre est chargée, la séparation verticale se produit entre la poutre FGM et la plaque de renforcement. Cette séparation crée une contrainte d'interface normale dans la couche adhésive. La contrainte normale $\sigma(x)$ est donnée comme suit :

$$\sigma(x) = \frac{E_a}{t_a}\left[w_p(x) - w_b(x)\right] \quad (41)$$

Où $w_b(x)$ et $w_p(x)$ sont respectivement les déplacements verticaux de la poutre FGM et la plaque de renforcement. L'équilibre de la poutre FGM et la plaque est déterminé en négligeant les termes du second ordre, conduisant aux relations suivantes :

Adhérent 1 (poutre) :

$$\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} = -\frac{1}{b}B^* N_b(x) - \frac{1}{b}D^* M_b(x) \quad (42)$$

$$\frac{dM_b(x)}{dx} = V_b(x) - \tau(x)b\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] \quad (43)$$

$$\frac{dV_b(x)}{dx} = -\sigma(x)b - q \quad (44)$$

Adhérent 2 (plaque):

$$\frac{d^2 w_p(x)}{dx^2} = -\frac{1}{E_p I_p} M_p(x) \quad (45)$$

$$\frac{dM_p(x)}{dx} = V_p(x) - \tau(x)b\frac{t_p}{2} \quad (46)$$

$$\frac{dV_p(x)}{dx} = \sigma(x)b \quad (47)$$

Sur la base des équations d'équilibre ci-dessus, les équations différentielles régissant les courbures des composants (poutre FGM, plaque de renforcement), exprimées en termes de contrainte de cisaillement et normales d'interface, sont données comme suit :

Adhérent 1 (poutre) :

$$\frac{d^4 w_b(x)}{dx^4} = -B^* \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{1}{b}D^*\left[-\sigma(x)b - q - b\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]\frac{d\tau(x)}{dx}\right] \quad (48)$$

Adhérent 2 (plaque) :

$$\frac{d^4 w_p(x)}{dx^4} = -\frac{1}{E_p I_p}\left[b\sigma(x) - \frac{t_p}{2} b\frac{d\tau(x)}{dx}\right] \quad (49)$$

La Substitution des Eqs. (48) et (49) dans la quatrième dérivée de la contrainte normale d'interface obtenus à partir de l'Eq. (38) donne :

$$\frac{d^4\sigma(x)}{dx^4} + \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{b}{E_p I_p} + D^*\right)\sigma(x) - \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{b}{E_p I_p}\frac{t_p}{2} + B^* - D^*\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]\right)\frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{E_a}{t_a}\frac{1}{b}D^* q = 0 \quad (50)$$

La solution générale de cette équation différentielle du quatrième ordre est :

$$\sigma(x) = e^{-\delta x}\left[C_1\cos(\delta x) + C_2\sin(\delta x)\right] + e^{\delta x}\left[C_3\cos(\delta x) + C_4\sin(\delta x)\right] - n_1\frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (51)$$

Pour une grande valeur de « *x* », *on* suppose que les contraintes normales deviennent nulles et comme résultat $C_3 = C_4 = 0$. La solution générale devient :

$$\sigma(x) = e^{-\delta x}\left[C_1\cos(\delta x) + C_2\sin(\delta x)\right] - n_1\frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (52)$$

Où

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{E_a}{4t_a}\left(\frac{b}{E_p I_p} + D^*\right)} \quad (53)$$

$$n_1 = \frac{-b(t_p/2) - B^* E_p I_p + D^* E_p I_p\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right]}{D^* E_p I_p + b} \quad (54)$$

Et

$$n_2 = \frac{D^* E_p I_p}{(D^* E_p I_p + b)b} \quad (55)$$

Les constantes C_1 et C_2 dans l'Eq. (52) sont déterminées à partir des conditions aux limites. La première condition aux limites est que le moment de flexion vaut zéro à l'extrémité de la plaque de renforcement.

En dérivant deux fois l'Eq. (41) et en substituant dans les Eqs. (42) et (45) nous aurons :

$$\left.\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{1}{b}B^* N_b(0) + \frac{1}{b}D^* M_b(0) - \frac{1}{E_p I_p}M_p(0)\right) \quad (56)$$

Rappelons que $M_p(0) = 0$, $N_p(0) = N_b(0) = 0$ et $M_b(0) = M_T(0)$ dans le bord de la plaque de renforcement, l'équation ci-dessus peut être exprimé comme :

$$\left.\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a}\frac{1}{b}D^* M_T(0) \quad (57)$$

La deuxième condition aux limites concerne la force de cisaillement au bord de la plaque de renforcement. En dérivant l'Eq. (41) trois fois et en substituant les Eqs. (40) et (46) dans l'expression qui en résulte, on aboutit à la relation suivante :

$$\left.\frac{d^3\sigma(x)}{dx^3}\right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{1}{b}D^* V_b(0) - \frac{1}{E_p I_p}V_p(0)\right) - \frac{E_a}{t_a}\left(D^*\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] - \frac{b}{E_p I_p}\frac{t_p}{2} - B^*\right)\tau(0) \quad (58)$$

La force de cisaillement appliquée au bord de la plaque est égale à zéro (c.à.*d.* $V_p(0) = 0$, $V_p(0) = V_T(0)$). La deuxième condition aux limites peut donc être exprimée comme suit:

$$\left.\frac{d^3\sigma(x)}{dx^3}\right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a}\frac{1}{b}D^* V_T(0) - n_3\tau(0) \quad (59)$$

Où

$$n_3 = \frac{E_a}{t_a}\left(D^*\left[\frac{h}{2} + z_{NA}\right] - \frac{b}{E_p I_p}\frac{t_p}{2} - B^*\right) \quad (60)$$

Après la dérivée de l'Eq. (52) cela conduit à l'expression suivante des contraintes d'interface normale au bord de la plaque :

$$\left.\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = -2\delta^2 C_2 - n_1\left.\frac{d^3\tau(x)}{dx^3}\right|_{x=0} - n_2\frac{d^2 q}{dx^2} \quad (61)$$

Et

$$\left.\frac{d^3\sigma(x)}{dx^3}\right|_{x=0} = 2\delta^3 C_1 + 2\delta^3 C_2 - n_1\left.\frac{d^4\tau(x)}{dx^4}\right|_{x=0} - n_2\frac{d^3 q}{dx^3} \quad (62)$$

La substitution des conditions aux limites dans les deux équations conduit alors à la détermination de C_1 et C_2 comme suit :

$$C_1 = \frac{E_a}{2\delta^3 t_a}\frac{1}{b}\left[V_T(0) + \delta M_T(0)\right]D^* - \frac{n_3}{2\delta^3}\tau(0) + \frac{n_1}{2\delta^3}\left[\left.\frac{d^4\tau(x)}{dx^4}\right|_{x=0} + \delta\left.\frac{d^3\tau(x)}{dx^3}\right|_{x=0}\right] \quad (63)$$

Et

$$C_2 = -\frac{E_a}{t_a}\frac{1}{2\delta^2}\frac{1}{b}D^* M_T(0) - \frac{n_1}{2\delta^2}\left.\frac{d^3\tau(x)}{dx^3}\right|_{x=0} \quad (64)$$

Avec les constantes C_1 et C_2 déterminée, la contrainte normale dans la couche d'adhésif peut alors être trouvée en utilisant l'Eq. (52).

3. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

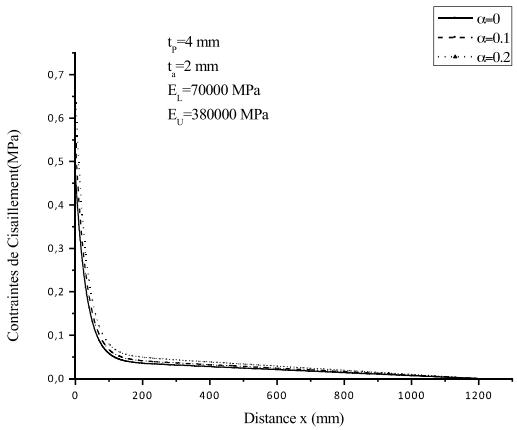
Nous présenterons dans ce qui suit les résultats relatifs au modèle analytique développé dans la précédente section. Une série de résultats des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque FRP sont présentés sous forme des graphes explicites.
Pour cela, les propriétés matérielles suivantes ont été retenues pour les présents calculs.

Tableau1: Propriétés matérielles

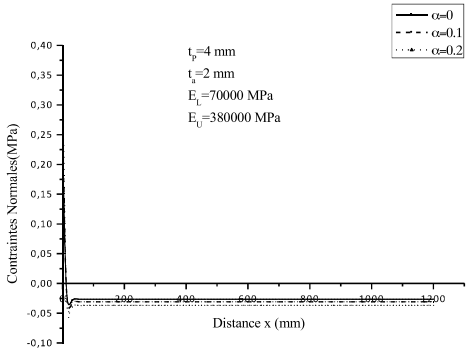
Matériaux	Module de Young « E » MPa
Aluminium (Al)	70000
Céramique (Al_2O_3)	380000
Acier (Ni)	214000

3.1. Influence de la porosité sur les contraintes d'interface

Sur la Fig. 3(a et b), on présente la variation des contraintes d'interface pour une poutre FGM type (Al/ Al_2O_3 et Al/ Ni) renforcée par une plaque CFRP. L'effet de la porosité de la poutre FGM a été pris en compte par le biais de l'introduction du coefficient α. Trois valeurs sont donc retenues (α = 0, 0.1 et 0.2). On constate que l'augmentation de l'indice de la porosité α conduit à un accroissement des contraintes d'interface. Cela peut être justifié par le fait que la porosité réduit la rigidité de la poutre.



(a)

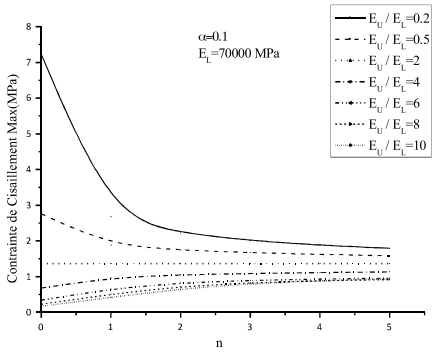


(b)

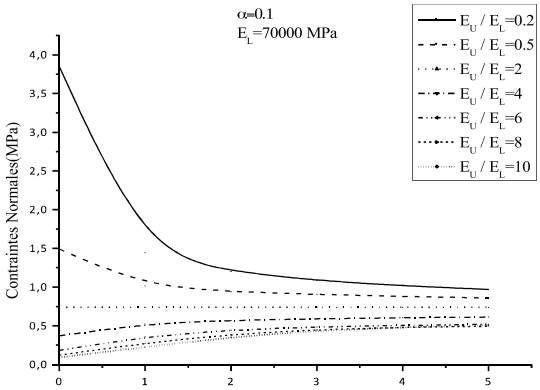
Figure 3: Influence de la porosité sur les contraintes d'interface d'une poutre FGM (Aluminium-Céramique) ((a) Contraintes de cisaillement (b) Contraintes normales).
Figure 3: Influence of porosity on the interface stresses of FGM beam (Aluminum-Ceramic) ((a) Shear stresses (b) Normal stresses).

3.2. Influence du nombre de variantes

Dans la Fig. 4(a et b), on représente la variation des contraintes d'interface en fonction de l'indice matériel « n » de la poutre FGM et ce pour différentes valeurs du rapport (E_U / E_L) et pour α = 0.1.



(a)



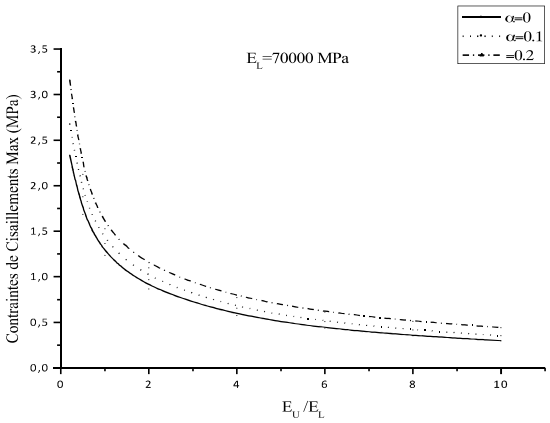
(b)

Figure 4: Influence du nombre de variante de la poutre non homogène FGM Renforcée par une plaque de CFRP ((a) Contraintes de cisaillement (b) Contraintes normales).
Figure 4: Influence of the number of variant inhomogeneous FGM beam Reinforced by CFRP plate ((a) Shear stresses (b) Normal stresses).

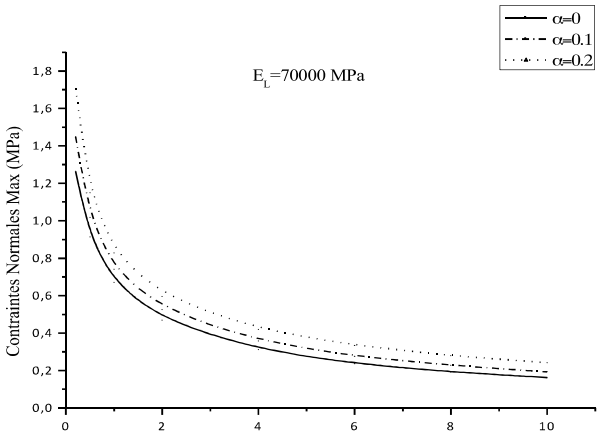
D'après la Fig. 4, on constate que l'utilisation d'un rapport (E_U / E_L) élevé favorise la réduction des contraintes de bords.

3.3. Influence du rapport (E_U / E_L)

Dans la Fig.5, nous présentons la variation des contraintes d'interface maximales (contraintes de bord) en fonction de rapport (E_U / E_L) de module de Young des deux matériaux Aluminium et Céramique.



(a)



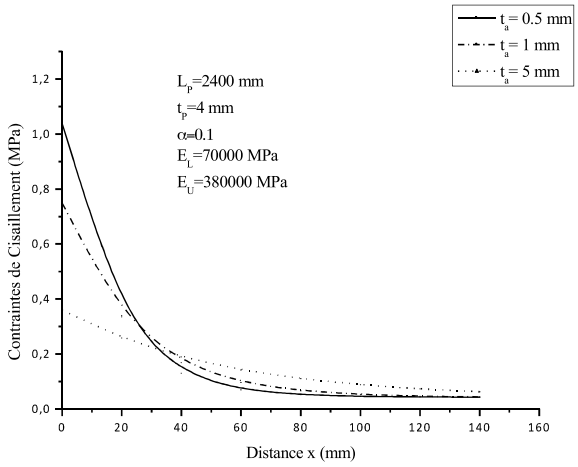
(b)

Figure 5: Influence du rapport (E_U / E_L) sur les contraintes de cisaillement et normales de bord d'une poutre FGM renforcée par une plaque de CFRP.
Figure 5: Influence Report (E_U / E_L) on the shear and normal stresses edge of FGM beam strengthened by CFRP plate.

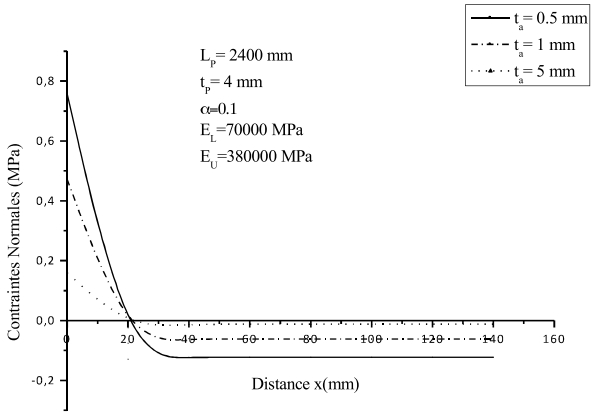
L'accroissement du rapport (E_U/E_L) conduit à une réduction significative de la concentration des contraintes aux bords de la plaque.

3.4. Effet de l'épaisseur de la couche d'adhésif

La variation des contraintes d'interface en fonction de l'épaisseur de la couche d'adhésif est représentée dans la Fig.6.
L'accroissement de l'épaisseur de la couche d'adhésif conduit à une réduction significative de la concentration des contraintes. C'est pourquoi, il est fortement recommandé d'utiliser une couche d'adhésif plus épaisse aux voisinages des bords.



(a)

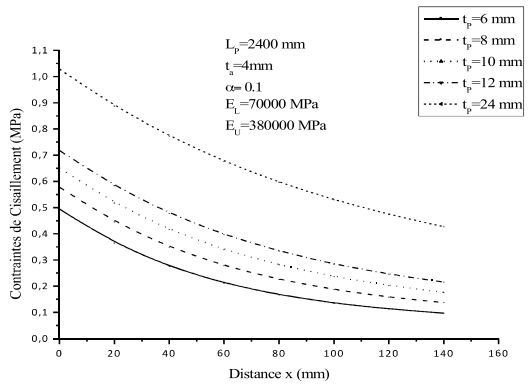


(b)

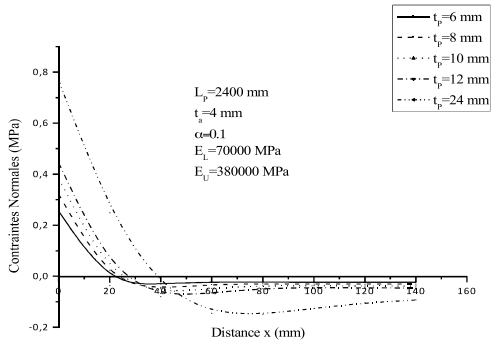
Figure 6: Effet de l'épaisseur de la couche d'adhésive sur les contrainte d'interface d'une poutre FGM (Aluminium-Céramique) ((a) contraintes de cisaillement (b) contraintes normales).
Figure 6: Effect of the thickness of the adhesive layer on the interface stress of FGM beam (Aluminum-Ceramic) ((a) shear stress (b) normal stresses).

3.5. Effet de l'épaisseur de la plaque de renforcement

L'épaisseur de la plaque est un facteur important dans le dimensionnement des structures renforcées. Dans la Fig. 7 nous présentons l'effet de l'épaisseur de la plaque sur les contraintes d'interface.
Cette figure illustre la proportionnalité qui existe entre les deux paramètres précités.
On remarque que le maximum de la valeur des contraintes est à l'extrémité de la plaque de renforcement. C'est le phénomène appelé effet de bord, signe des premières défaillances de la structure.



(a)



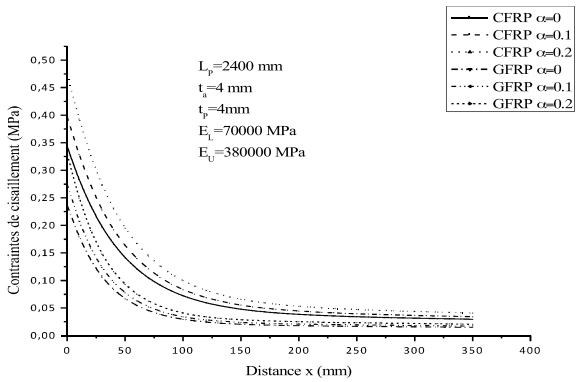
(b)

Figure 7 : Effet de l'épaisseur de la plaque d'acier renforcée sur les contraintes d'interface (cas d'un chargement uniformément réparti) d'une poutre FGM (Aluminium-Céramique) ((a) contraintes de cisaillement (b) contraintes normales).

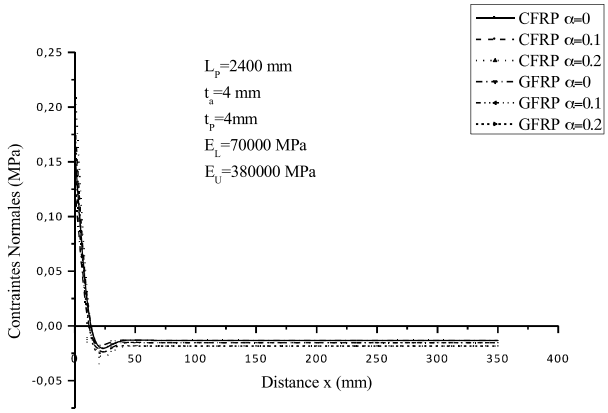
Figure 7: Effect of thickness of the steel plate reinforced on the interface stresses (case of uniform distributed load) of a beam FGM (Aluminum-Ceramic) ((a) shear stress (b) normal stresses).

3.6. Effet du module d'élasticité de la plaque de renforcement

Dans la Fig.8, on présente l'effet des types de renfort CFRP et GFRP (plaque composite en carbone et en verre) sur la variation des contraintes d'interface pour le cas d'un chargement réparti d'une poutre FGM (trois variantes de porosité ont été retenus α = 0, α = 0.1 et α = 0.2), ceci nous a permis d'illustrer que l'utilisation d'une plaque en acier engendre des contraintes plus élevées que celles obtenues par l'application des plaques en composite (CFRP et GFRP).



(a)



(b)

Figure8 : Effet des types de renfort sur la variation des contraintes d'interface pour le cas d'un chargement réparti d'une poutre FGM (Aluminium-Céramique)

Figure 8: Effect of types of reinforcement on the variation of the interface stresses for the case of uniform distributed load of FGM beam (Aluminum-Ceramics) ((a) shear stress (b) normal stresses).

4. CONCLUSION

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque FRP, prenant en compte les effets de la porosité dans la poutre (cas d'imperfection de la poutre).

Le modèle proposé est basé sur l'approche de compatibilité des déformations proposé par Smith et Teng [22]. Il est vrai que dans la formulation des expressions de déformations au niveau des deux adhérents (poutre et plaque) un comportement linéaire a été retenu. Bien que ce ne soit pas le cas dans cette zone (d'ailleurs d'autres travaux vont suivent pour prendre en charge le cas de la non linéarité) mais des travaux antérieurs réalisés par notre équipe de recherche (on cite à titre exemple les travaux de Tounsi et al. [33] qui sont basés sur le même principe et qui ont été comparés avec des résultats expérimentaux) ont donnés une grande satisfaction ce qui prouve l'efficacité de ce modèle et sa simplicité.

Une étude paramétrique a été menée par la suite dans le but de souligner les effets des différents paramètres régissant ces contraintes. Quelques conclusions ont pu être dégagées qu'on peut résumer comme suit :

- l'augmentation de l'indice de la porosité α conduit à un accroissement des contraintes d'interface. Cela peut être justifié par le faite que la porosité réduit la rigidité de la poutre ;
- le rapport (E_U / E_L) élevé favorise la réduction des contraintes de bords. Une réduction significative de la concentration de ces dernières est causée par l'accroissance de ce rapport ;
- l'accroissement de l'épaisseur de la couche d'adhésif conduit à une réduction significative de la concentration des contraintes ;
- un maximum de la valeur des contraintes se situe à l'extrémité de la plaque de renforcement (effet de bord), qui est le signe des premières défaillances de la structure ;
- l'utilisation d'une plaque en acier engendre des contraintes plus élevées que celles obtenues par l'application des plaques en composite (CFRP et GFRP). C'est l'effet du module d'élasticité.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Bao, G. and Wang, L., Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings., Int. J. Solids Struct .Vol.32, 1995.

[2] Cai, H. and Bao, G., Crack bridging in functionally graded coatings.,Int. J. Solids Struct., Vol.35, 1998.

[3] Chung,Y. L., and Chi, S. H., The Residual Stress of Functionally Graded Materials, J. Chinese Inst. Civil Hydr. Eng ... J. Mech. Vol. 18, 2002.

[4] Chung, Y.L., and Chi, S,. H., "The Residual Stress of Functionally Graded . Eng Fract. Mech., Vol. 70, 2003.

[5] Upadhyay, A,K., Simha, K,R,Y., Equivalent homogeneous variable depth. Int. J. Fract., Vol.144, 2007.

[6] Jones, R., Bartholomeusz, R., Kaye, R., Roberts, J., Bonded-composite repair of representative multi-site damage in a full-scale fatigue-test article, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol.21,1994.

[7] Paul, J and Jones, R., Repair of impact damaged composites, Engineering Fract. Mech. ,Vol.41, 1992.

[8] Baker, A. A. , Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites—an overview of Australian work ,Compos. Struct Vol.2, 1984.

[9] Dehm,S. And Wurzel, D. Fast in-situ repair of aircraft panel components. Journal of Aircraft, Vol.26, 1989.

[10] Garden, H. N., Holloway, L,C and Torne A.M., A preliminary evaluation of carbon fiber reinforced polymer plates for strengthening reinforced concrete members, In Proc. Instm. Civ. Engrs. Structs Bldgs., Vol.123, 1997.

[11] Saadatmanesh, H., Ehsani, M.R., RC beams strengthened with GFRP plates: I. Experimental study. J. Struct. Eng. ASCE, Vol.117, 1991.

[12] Meier, U., Deuring, H. and Schwegler, G., Strengthening of structures with CFRP laminates, Research and application in Switzerland; Adv. composites materials in bridges and structures,1992.

[13] Ferrier, E., Comportement de l'interface composite-béton sous des sollicitations de fluage thermostimulé et en fatigue oligo-cyclique. Application au calcul prévisionnel de la durabilité de poutre BA renforcées, Thèse de doctorat, Université Lyon 1, 1999.

[14] Avril S., Application des méthodes de mesure de champs à la caractérisation mécanique de poutres en béton armé renforcées par matériaux composites, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Mines Saint Etienne, 2002.

[15] Tounsi, A. and Benyoucef , S., Interfacial stresses in externally FRP-plated concrete beams. Int. J. of Adhesion & Adhesives, Vol. 27, 2007.

[16]Tounsi, A., Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate. Inter J Solids and Structures, Vol. 43, 2006.

[17] Benyoucef, S., Tounsi, A., Meftah, A.A., Adda Bedia, E, A., Approximate analysis of the interfacial stress concentrations in FRP – RC hybrid beams. Comp Interfaces, Vol. 13, 2006.

[18] Malik, M. and Bert, C, W., Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method, Inter Journal of Solids and Structures, Vol. 35 1998.

[19] Roberts, T.M., Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams, The Structural Engineer, Vol.76, 1989.

[20] Roberts, T.M and Haji-Kazemi, H. Theoretical study of the behavior of reinforced concrete beams strengthened by externally bonded steel plates, Proceedings of the Inst of Civil Engi, Part 2,1989.

[21] Ye, J. Q., Interfacial shear transfer of RC beams strengthened by bonded composites plates. Cement Concrete Composites, Vol. 23, 2001.

[22] Smith and Teng , Interfacial stresses in plated RC beams, Eng. Structures, Vol. 23, 2001.

[23] Chai, Y, H., Priestley, M, J, N., and Seible, F., Seismic retrofit of circular bridge columns for enhanced flexural performance". s.l. : ACI Structural Journal,Vol. 88, 1991.

[24] Benachour, A., Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques composites collées sous précontrainte, Thèse de doctorat LM§H 2010.

[25] Taljsten, B., Strengthening of beams by plate bonding" Materials in Civil Eng ASCE, Vol. 9, 1997.

[26] Benyoucef, S., Tounsi, A., Meftah, S.A. and Adda Bedia, E. A., Creep and Shrinkage effect on Adhesive Stresses in RC Beams strengthened with Composite Laminates, Comp Sci and Tech, Vol. 67, 2007.

[27] Liu, Z and Zhu, B., Analytical solutions for R/C beams strengthened by externally bonded steel plates. Tongji, J., Univ. (in Chines), Vol. 22 , 1994.

[28] Vilnay, O., The analysis of reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates, The Int. J. Cement Compos. And Light weight Concrete, Vol. 10, 1988.

[29] Meradjah , M., Benyoucef ,S., Tounsi , A., Adda, EA., and Merdaci, S., Interfacial Stresses in Plated Beams with Exponentially-Varying Properties, J.of Adh. Sci. and Tech , Vol.24, 2010.

[30] Tounsi, A., Benatta, M.A., Mechab, I., Adda, EA., Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. Computational Materials Science, Vol. 44, 2008.

[31] Wattanasakulpong, N and Ungbhakorn, V., Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, Aerospace Science and Technology, Vol. 32 2014.

[32]Sankar, B, V., An elasticity solution for functionally graded beams, Compos. Sci. Technol, Vol. 61, 2001.

[33] Tounsi, A., T. Hassaine Daouadji, T., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA., International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 29, 2009.